

Programma per i seminari sulla teoria dei controlli applicata all'economia.

Il seminario è articolato in quattro pomeriggi alquanto distanziati al lo scopo di permettere, tra un incontro e l'altro, una più approfondita rimeditazione del programma svolto e quindi una migliore utilizzazione dei tempi lasciati al dibattito con i docenti.

Ciascun pomeriggio comprenderà una lezione svolta dal Prof. Carlo Felice Manara, in cui sarà illustrata la teoria matematica dei controlli ed i concetti di topologia e di calcolo delle variazioni necessari alla sua impostazione; alla lezione seguirà un'esercitazione avente lo scopo di fornire esempi sia matematici che economici di quanto illustrato nella lezione stessa; seguirà a conclusione di ciascun pomeriggio un ampio dibattito in cui si potranno discutere col Prof. Manara gli eventuali punti controversi degli argomenti svolti.

Il seminario ha lo scopo di presentare, e non certo di esaurire, alcuni problemi; quindi non occorrono particolari letture propedeutiche, ma è sufficiente una buona conoscenza delle teorie matematiche classiche.

Di volta in volta saranno suggerite pubblicazioni che trattino più approfonditamente i vari temi toccati.

Se sarà ritenuto utile dai partecipanti, potranno essere preparate delle dispense che raccolgano gli argomenti svolti durante il seminario.

PROGRAMMA DEL SEMINARIO

(lezioni)

venerdì 12 marzo 1971 ore 15

1 - Elementi di topologia in uno spazio R^n

Spazi funzionali; elementi di topologia in uno spazio funzionale .

Sistemi di n equazioni differenziali e curve in un R^n

Funzioni obiettive; problemi classici di ottimizzazione ed equazioni di Eulero.

Equazioni differenziali con controlli. Insiemi chiusi ed insiemi aperti nello spazio dei controlli.

Funzione di Hamilton. Forma canonica delle equazioni differenziali. Enunciato del principio di Pontryagin.

venerdì 26 marzo 1971 ore 15

2 - Sistemi di equazioni differenziali autonomi e non autonomi. Problema della sintesi dei controlli.

Condizioni di trasversabilità e loro interpretazione geometrica.

Sistemi di equazioni differenziali lineari con coefficienti costanti.

venerdì 2 aprile 1971 ore 15

3 - Programmazione dinamica di Bellmann.

Funzionali additivi su uno spazio ed equazione funzionale di Bellmann.

Confronto con il procedimento di Pontryagin.

venerdì 23 aprile 1971 ore 15

4 - Applicazioni economiche del procedimento di Pontryagin.

Problemi di investimento ed altri problemi di ottimizzazione.

Il programma dettagliato dei singoli pomeriggi sarà inviato ai partecipanti durante lo svolgimento del seminario per potere eventualmente concordare qualche modifica.

Alleghiamo intanto il programma dettagliato del primo pomeriggio.

Programma di venerdì 12 marzo 1971.

ore 15 lezione:

Elementi di topologia in uno spazio R^n : distanze e metrizzazione.

Elementi di topologia di uno spazio funzionale: un'opportuna metrizzazione.

Sistemi di n equazioni differenziali e curve in R^n : esistenza e unicità delle soluzioni di sistemi autonomi e non autonomi; condizioni iniziali e condizioni al contorno.

Funzioni obiettivo: problemi classici di ottimizzazione ed equazioni di Eulero.

Cenno ai metodi variazionali.

Equazioni differenziali con controlli: insiemi aperti e chiusi nello spazio dei controlli.

Funzioni di Hamilton: forma canonica delle equazioni differenziali.

Enunciato del principio di Pontryagin.

ore 16.30 esercitazione:

Geodetiche nello spazio R^n .

Brachistocrone nello spazio R^2 .

Le equazioni delle curve suddette saranno ricavate usando sia il metodo variazionale che il principio di Pontryagin, in modo da poter comparare i due metodi.

Saranno poi presentati due esempi economici che mettano in rilievo la criticità, in certe condizioni, dei metodi variazionali.

ore 17.30

Dibattito con la partecipazione del Prof. Manara.

Il seminario è dedicato sostanzialmente alla esposizione di alcuni modelli elementari che richiedono applicazione della teoria dei controlli dei problemi di Economia.

Tali modelli sono stati scelti per la loro tipicità: il primo infatti riguarda un sistema economico la cui evoluzione può essere espressa in forma autonoma mentre il secondo riguarda invece un problema che deve essere presentato in forma non autonoma.

Il primo modello riguarda un sistema economico nel quale sono supposti presenti i due fattori abituali di produzione (capitale e lavoro) attraverso una funzione classica di produzione del tipo di Cobb-Douglas.

Si tratta di rendere massimo l'integrale del consumo, agendo sulla distribuzione delle risorse.

Il caso tipico del problema dà luogo ad un controllo che varia con discontinuità e fornisce una evoluzione temporale che può essere suddivisa in tre tratti, dando in certo modo una nuova versione del classico "Teorema dell'autostrada".

Il secondo modello riguarda un problema di qualificazione della mano d'opera in una azienda.

Si tratta di distribuire il tempo dei lavoratori tra riqualificazione e lavoro, tenendo conto della naturale evoluzione dell'apprendimento e della crescita della redditività del lavoro con la qualificazione.

Anche in questo caso, impostata mediante la teoria dei controlli, la questione conduce ad un controllo che è una funzione discontinua nel tempo. Uno dei casi tipici di soluzione conduce ad una traiettoria che può essere divisa in tre fasi: in una prima fase tutto il tempo a disposizione viene dedicato alla qualificazione; in una seconda vi è una suddivisione del tempo tra qualificazione e lavoro, in un terzo infine si dedica tutto il tempo al lavoro.

Entrambi questi modelli tipici dimostrano la flessibilità della teoria dei controlli nella trattazione dei problemi dell'economia tanto a livello di interi sistemi economici che a livello aziendale.

Confronto tra il metodo di programmazione dinamica di Bellmann e i metodi suggeriti dalla teoria dei controlli.

I metodi della programmazione dinamica proposti da Bellmann da un certo punto di vista si presentano come più generali di quelli che sono forniti dalla teoria dei controlli.

Si potrebbe infatti dire che Bellmann considera un funzionale additivo su uno spazio qualunque, considera una evoluzione di un certo fenomeno e cerca il massimo durante la evoluzione mediante una equazione funzionale, che è suscettibile di risoluzione numerica diretta.

La equazione funzionale di Bellmann potrebbe essere tradotta in parole dicendo che ogni sotto programma di un programma ottimale è pure ottimale.

Va tuttavia osservato che nel caso del metodo di Bellmann il controllo è supposto sintetizzato; in altre parole la soluzione del problema di massimo può essere ottenuta determinando il controllo in funzione del punto nel quale il sistema si trovi, istante per istante.

Quando lo spazio di fase si riduca ad uno spazio euclideo ad n dimensioni, la evoluzione sia data da un sistema di equazioni differenziali e il funzionale sia dato da un integrale, allora la equazione funzionale di Bellmann viene tradotta mediante le equazioni hamiltoniane che conducono alla soluzione dei problemi della teoria dei controlli.